

点集拓扑空间关系

马克斯·埃根霍费尔和罗伯特·弗兰佐萨

引用这篇文章:马克思·埃根霍夫和罗伯特·弗兰佐萨( 1991 )点集拓扑

空间关系，《国际地理信息系统杂志》，5 : 2，161 - 174，DOI :

10.80 / 02 . 19980.133836332117

链接到这篇文章: https://doi.org/10.1080/02693799108927841

在线出版: 2007年4月5日。

将你的文章提交给这本杂志



引用文章: 587观点引用文章

有关访问和使用的完整条款和条件，请访问

http://www.tandfonline.com/action/journalInformation?日记代码= tgis 20

智力。《地理信息系统》，1991年，第5卷，第2期，161 - 174页

点集拓扑空间关系

马克斯·埃根霍夫

国家地理信息和分析中心

测量工程部，博德曼厅107号，

美国缅因州奥诺市缅因大学04469

罗伯特·弗兰佐萨

数学系，内维尔厅417号，

美国缅因州奥诺市缅因大学04469

摘要。地理信息系统( GIS )的实际需求导致了对描述空间关系的**正式和合理方法（formal and sound method）**的研究。在介绍拓扑学的基本思想和概念之后，发展了一种新的（novel）集合间拓扑空间关系理论，在这种理论中，集合间的拓扑空间关系定义为两个集合的边界和内部的交点/交集（intersections）。通过将简单和非空作为交点的值，总共描述了16种拓扑空间关系，每种拓扑空间关系都可以在R中实现。如果这些集合被限制在空间区域，这个集合将被减少到9种关系，空间区域是一个连接拓扑空间的相当广泛的子集类别，在GIS中有应用。结果表明，这些关系**对应于**一些标准集合理论和集合之间的拓扑空间关系，如相等、不相交和内部包含。

1 .介绍

这里报道的工作是出于对地理信息系统领域空间关系的正式理解的**实际需要（practical need）**。为了显示、处理或分析空间信息，用户通过询问从GIS中选择数据。几乎任何GIS查询都是基于空间概念。许多疑问**明确（explicitly）**结合（incorporate）空间关系来描述空间对象的约束，以

被分析或显示。例如，地理信息系统用户可能会询问以下查询，以获取有关有毒废物堆放场对中的学童的潜在风险的信息一个特定的区域:“回收10英里范围内的所有有毒废物堆放场

位于彭诺斯科特县及其邻近的县。信息系统所知的小学数量受到约束条件的限制。特别令人感兴趣的是空间限制由空间关系表示，例如10英里以内、10英里以内和相邻。

缺乏全面的空间关系理论一直是任何地理信息系统实施的主要障碍。问题不仅在于为这些空间关系选择合适的术语，还在于确定它们的语义。空间关系理论的发展有望提供

以下问题的答案( Aber 1987 ) :

* 描述地理对象之间关系所需的**基本几何属性**（fundamental geometric properties）是什么？
* 如何根据基本几何性质正式定义这些关系？
* 空间关系的最小集合是什么?

**除了（In addition to)**纯粹的数学方面之外，如果要发展适用于现实世界问题的空间关系理论( NCGIA 1989 )，还必须包括认知、语言和心理方面的考虑( Talmy 1983年，Herskovits 1986年)。在本文的范围内(with the scope of this paper)，将只考虑从点集拓扑中部分提供的形式数学(mathematical)概念。

这种空间关系理论的应用超出了地理信息系统的范围。任何处理空间数据的科学和工程分支都将受益于对空间关系的正式理解。特别是，它对空间逻辑和空间推理的贡献也将有助于测量工程、计算机辅助设计/计算机辅助制造( CAD / CAM )、机器人和超大规模集成( VLSN设计)等领域。

空间关系的多样性可分为三类: ( I )在参考对象的拓扑变换下不变的拓扑关系( Egenhofer 1989，Egenhofer和Herring 1990 )；( 2 )距离和方向方面的度量关系( Pequet和Ci -香1987 )；和( 3 )关于空间物体的部分和全部顺序的关系( Kanz 1990 )，如介词所描述的，如前面、后面、上面和下面( Freeman 1975，Chang等人)。1989年，Hernandez 1991年)。在本文的范围内，只讨论拓扑空间关系。

迄今为止，关系的形式仅限于一维空间中的简单数据类型，例如整数、实数或它们的组合，例如间隔( Allen 1983 )。空间数据，如地理对象或CAD / CAM模型，以更高的维度扩展。人们一直认为这样一个空间中的一组原始关系更丰富，但迄今为止还没有尝试系统地探索这一假设。

这篇论文的目标是双重的。首先，表明用点集的拓扑不变性质描述拓扑空间关系是相当简单的。结果，两个点集之间的拓扑空间关系可以用很少的计算工作量来确定。第二，表明存在一个任何拓扑空间关系都属于其中的框架。这并没有说明由这种形式主义确定的一组关系是完整的，即人类可以区分其他关系，但是形式主义提供了完整的覆盖。即任何这样的附加关系将仅仅是所述关系之一的专门化。- -

作为底层数据模型，选择了拓扑空间的子集。点集方法是表示拓扑空间区域的最通用模型。使用不同模型定义拓扑空间关系的其他方法，如区间( Pull和Egenhofer，1988年)或简单复合物( Egenhofer，1989年)，通过这种点集方法得到推广。

本文的组织如下。下一节回顾以前定义拓扑空间关系的方法。第3节总结了点集拓扑的相关概念，并介绍了本文剩余部分中使用的概念。第4节介绍了拓扑空间关系的定义，并展示了它们在RZ中的实现。第5节研究了两个空间区域之间的关系，拓扑空间的子集，特别适用于地理数据处理。在第六节中，对内部关系和罕见关系进行了比较。

2 .以前的工作

空间关系的各种术语集可以在计算机科学和地理文献中找到( Freeman 1975年，Claire和Guptill 1982年，Chang等人)。

拓扑关系

163

1989年，Molenaar 1989年)。特别是空间查询语言的设计( Frank 1982，Ingram和Phillips 1987，Smith等人。1987年，Herring等人。1988年，Rosopoulos等人。1988年)是自然语言中带有口头解释的空间关系的非正式符号的储备库。这些术语的一个主要缺点是缺乏正式的基础，因为它们的定义常常基于其他没有准确定义，但被认为是普遍理解的表达。

大多数空间关系的正式定义将它们描述为二进制点集运算的结果。随后对这些方法的审查将显示它们的优势和不足。显而易见的是，以前的研究都没有系统地进行到足以证明所定义的关系能够完全覆盖两个空间对象之间的拓扑空间关系。一些定义只考虑“空间对象”的有限子集表示，而另一些定义则应用不足的概念来定义拓扑空间关系的整个范围。

这里不考虑使用图元距离和方向与逻辑连接器AND、OR和NOT ( Pequet 1986 )相结合的形式主义。假设每个空间都有一个度量，这显然限制太多，因此这种形式不能应用于纯粹的拓扑环境。

集合运算术语中的关系定义使用纯集合论来描述拓扑关系。例如，以下基于点集的定义是根据点集的相等、不相等、内部、外部和相交给出的

运算=。，！；；；和RV [·吉丁1988 ) :

x = y : =点( x ) =点( y )×y : =点( x )点( y )

y内的x : =点( x )！；；；点( y )

y之外的x : =点( x ) f " \点( y ) = 0

x与y相交: =点( x ) f " \点( y ) 0

这些定义的缺点是这组关系既不正交也不完整。例如，相等和内部都包含在相交的定义中。相比之下，点集的模型不允许基于点集的特定部分(如边界和内部)的区别来定义这些关系。例如，这种关系在交叉方面不同于存在公共边界点的关系，但是没有遇到公共内部点。

点集方法已经通过考虑边界和内部而得到扩展，以便能够区分重叠和相邻( Pull 1988 ) :

x重叠y : =边界( x ) f " \边界( y ) 0和

内部( x ) f " \内部( y ) 0

x邻居y : =边界( x ) f " \边界( y ) 0和

内部( x ) f " \内部( y ) = 0

在一种更系统的方法中，边界和内部已经被确定为多边形交叉点的关键描述( Wagner 1988 )。通过比较边界和内部是否相交，已经确定了四种关系: ( I )

164

埃肯霍夫和弗兰佐萨博士

边界相交的邻域，但内部不相交；( 2 )边界和内部都不相交的分离；( 3 )边界不相交但内部相交的严格包容；以及( 4 )边界和内部相交的交点。这种方法使用单一的、连贯的方法来描述拓扑空间关系，但是并不是在所有的后果中进行。例如，不能区分交集和等式，因为对于

BotII关系边界和内部相交。

3 .点集拓扑

这种拓扑空间关系模型基于内部和边界的点集拓扑概念。在本节中，给出了点集拓扑的适当定义和结果。一些结果是在没有证据的情况下陈述的。

这些证据都是定义的直接结果，可以找到

在大多数基本拓扑教科书中，例如Munkers ( 1966 )和西班牙人( 1966 )。

让我们来设定。X上的拓扑是满足

三个条件: ( 1 )空集和X在d中；( 2 ) d是在任意结合下关闭的；和( 3 ) d在有限交点下闭合。拓扑空间是拓扑d位于X上的集合X。拓扑中位于X上的集合称为开集，它们在X上的补集称为闭集。封闭集的集合: ( 1 )包含空集和X；( 2 )在任意交叉点下封闭；( 3 )在有限联盟下封闭。

通过集合X上拓扑中的开集，建立了一个集理论上的亲密度概念。如果U是一个开放集，XeU，那么据说U是x的邻域，这个集理论上的亲密度概念概括了度量上的亲密度概念。集合X上的度量d在X上归纳出一个拓扑，称为由d定义的度量拓扑。这

拓扑问题是，如果对于每个xeU，e > 0，则U . X是一个开放集，这样

半径为x的d形球包含在美国。d形球是一组点，其距离

度量d中的x小于s，即{ yeXld ( x，y ) < e }。

在本文的剩余部分，假设X是一个具有拓扑d的集合。iFS是X的子集，然后S继承了d的拓扑。这种拓扑称为子空间拓扑，并且是

定义为，当且仅当某个集合Ved的U = Sn V时，子空间拓扑中的U = S是开放的。在这种情况下，S被称为X的子空间

3.1。内部

给Yc。X，Y的内部，用r表示，定义为所有开放的并集

Y中包含的集合，即Ys的内部Y中包含的最大开放集合位于Yf的内部，并且仅当Y中包含Y的邻域时，即

如果，也只有当，有一个开放的集合U，使得集合的内部可以

空的，例如空的装置内部是空的。X的内部是X本身。如果你是

打开，然后U =打开，如果打开，然后再打开

3.2。关闭

Y的闭包由Y表示，定义为

包含Y，即Ys的闭包，是包含Y的最小闭包集

当且仅当Y的每个邻域与Y相交时，即yeYif和

仅当每个包含Y的开放集合U的Un Y 0时。空集合是唯一具有的集合

空封闭。X的闭合是X自身的闭合，然后C = C1fz，C = C1fz，C = Y

拓扑关系

165

3.3。分界线

Y的边界，用Ay表示，是Yan的闭包和Y的补集的闭包的交集，即Ay = YI″) XY。边界是封闭集。由此可见，y在Yif的边界内，只有y的每个邻域都相交

两者及其补码，即Yeyif，且仅当UI ) Y # 0和UI”) ( X Y ) # 0用于

每一个包含y的开放集U边界可以是空的，例如两者的边界。X和空集都是空的。

3.4。内部、封闭和边界之间的关系

内部、闭包和边界的概念是即将到来的集合间拓扑空间关系讨论的基础。内部、封闭和边界之间的关系由以下命题描述:

提案3.1。y“l”) aY = 0。

证据:如果X是Y，那么X的每一个邻域U都与X - YSO相交，从而不能包含在Y中。因为在YT中不包含X的邻域U，所以X : Y”和，

因此，Ayi”) Y”= 0。0

提案3.2。是啊

证据: Y“C : Yc : Yc : Yan，顾名思义，AyC : Y。因为Y”和Ay都是Yit的子集，接下来是( Y“UAY”) C : Y。为了表明Yc : ( Y“UAY”)，让xef假设x : Y。它

展示了xea Y，自从xe Y以来，它只需要展示xeX Y . x : Y”意味着什么

x的每个邻域不包含在1中:因此，x的每个邻域

X与X - Y相交，意味着xeX - Y。所以xeay。因此，如果xeY和x : Y”，那么xeay，接下来是Yc : ( Y“uaY”)。因此Y = ( Y”UAY )。0

3.5。分离

分离和连通性的概念对于建立集合之间即将到来的拓扑空间关系至关重要。让Yc : x .一个与一个分开

满足以下三个条件的X子集对A、B : ( 1 ) A # 0和B # 0；( 2 )奥布= Y；和( 3 ) AI”) B = 0，AI”) B = 0。如果存在Y的分离，那么是Ys

据说是断开的，否则Yis说是接通的。如果我是两个非

空的不相交的开放的X子集，那么接下来Y被断开。如果C被连接，C : D : C，那么D被连接。特别是，iFC被连接，然后Cis被连接；然而，交流电和一氧化碳不需要连接。

命题3.3 .如果A，B形成Yad的分离，如果Z是Y的连通子集，那么Z c : A或Z c : B

证明:根据假设，Z是A和B的并集的子集，即Z c : AuB。是啊

示出了Z和A或B之一之间的交点是空的，即Z I”) B = 0或ZI”) A = 0。假设不是，即假设两个交叉点都不是空的。让

C = ZI”) A和D = ZI”) B )。那么C和D都是非空的，CUD = Z。如CC : A，DC : B和AI”) B = 0 (因为A，B是Y的分离)，因此

CI”) D = 0。类似地，cl″) 15 = 0；因此，C和D形成Z的分离，与Z是相连的假设相矛盾。因此，要么ZI”) B = 0，要么ZI”) A = 0，

这意味着，不管是丙:甲还是丙:乙: 0

埃亨霍夫和弗兰佐萨博士

166

如果X Z断开连接，则X的子集Z被称为分离X。下面的分离结果给出了X子集的边界分离X的简单条件

提案3.4。假设Yc : X。如果然后你和X形成一个

X - 0Y的分离，因此OY分离X

证据:假设，yo和X Yare不是空的。显然，它们是不相交的

开放集。提案3.2暗示X - Oy =青奥村( X - Y )。由此可见，你和

X形成了X - Oy的分离。

3.6。拓扑等价

拓扑等价的研究是拓扑理论的核心。如果两个拓扑空间之间有一个产生双射的双射函数，那么它们在拓扑上是等价的(同胚的或相同拓扑类型的)

各个拓扑中的开放集之间的对应关系。这种功能，

这是一个连续的逆过程，被称为同胚。例子

同胚是欧几里得关于平移、旋转、缩放和偏斜的概念。在同胚下保留的拓扑空间的性质称为空间的拓扑不变量。例如，连通性的性质是拓扑不变量。

4 .描述拓扑空间关系的框架这个模型描述了两个子集A和A之间的拓扑空间关系。拓扑空间X的B是基于对两组A和B的边界和内部的四个交点的考虑，即IjanOb、AONB”、IjanBo和

敖包。。

定义4.1。假设A，B是拓扑空间X的一对子集。A和B之间的拓扑空间关系由拓扑不变量的四元组来描述，这些拓扑不变量分别与四个集合OainIJb、AONbO、OanbO和AONIJb中的每一个相关联。

。在基础空间X的同胚下，两个集合之间的拓扑空间关系得以保持。具体来说，如果: X是同胚，那么A、BcX、OaOb、AoB”、IjanBo”和AoIJB分别同胚映射到IjF ( A ) NijF ( B )、F ( Atnf ) ( Bt，IjF ( A ) nf ( Bt )和F ( A ) OniJF ( B )。由于拓扑空间关系是根据这些交点的拓扑不变量定义的，因此X中A和B之间的拓扑空间关系与Y中f ( A )和f ( B )之间的拓扑空间关系是相同的

拓扑空间关系在这里用四元组L、- > \_ )表示。这些条目按顺序对应于与四个集合交点相关联的拓扑不变量的值。第一个交叉点称为边界-边界交叉点，第二个交叉点称为内部-内部交叉点，第三个交叉点称为边界-内部交叉点，第四个交叉点称为内部-边界交叉点。

4.1。空/非空集合交点的拓扑空间关系

作为四元组中的条目，考虑在同胚下不变的集合的属性。例如，属性为空和非空

拓扑关系

167

是集合论的，因此在拓扑上不变。本文没有考虑的其他不变量是集合的维数和连通分量的数量( Munkers 1966 )。空/非空是最简单和最通用的不变量，因此任何其他不变量都可以被认为是更具限制性的分类器。

在本文的剩余部分，注意力被限制在二元拓扑空间关系上，这种关系是通过给四元组中的条目分配适当的空值( 0 )和非空值( 10 )来定义的。表1总结了这些组合的16种可能性。

集合为空或非空；因此，很明显，这16个拓扑空间关系提供了完全的覆盖，也就是说，给定X中的任意一对集合A和B，总是存在与A和B相关联的拓扑空间关系。此外，一个集合不能同时为空和非空，因此，这16个拓扑空间关系是互斥的，即，对于X中的任意一对集合A和B，正好16个拓扑空间关系中的一个成立。

一般来说，16种空间关系中的每一种都可以发生在两组之间。取决于对集合和底层拓扑空间的各种限制，现有拓扑空间关系的实际集合可以是表1中16的子集。对于平面R中的一般点集，可以实现所有16种拓扑空间关系(图1 )。

4.2。拓扑空间对关系的影响

设置，即A和B所在的拓扑空间X，在A和B之间的空间关系中起着重要作用。例如，在图2 (左面板)中，这两组

A和B具有关系( 0.0，0.0，0 )作为线的子集。同样的

配置显示了两个集合嵌入平面时的不同关系(图2，右侧面板)。假设飞机，A和裸机的边界

分别等于A和B，内部为空，即OA = A，AO = 0，OB = B，BO = 0。由此可见，在平面上，两组A和B之间的空间关系

是(即0，0，0 )

表1。16种生物关系规范基于边界和内部的空交点和非空交点的标准。

咏叹调

RO 0 0 0 0

r，，0 0 0 0

r，0，0 0 0

r，，0，0 0 0

r0 0，0 0

r，，0 0，0 0

r0，0 ' 0 0

( 7，0，0.0 0

( 8 0 0 0，0

RG (..0，0 0 ' 0

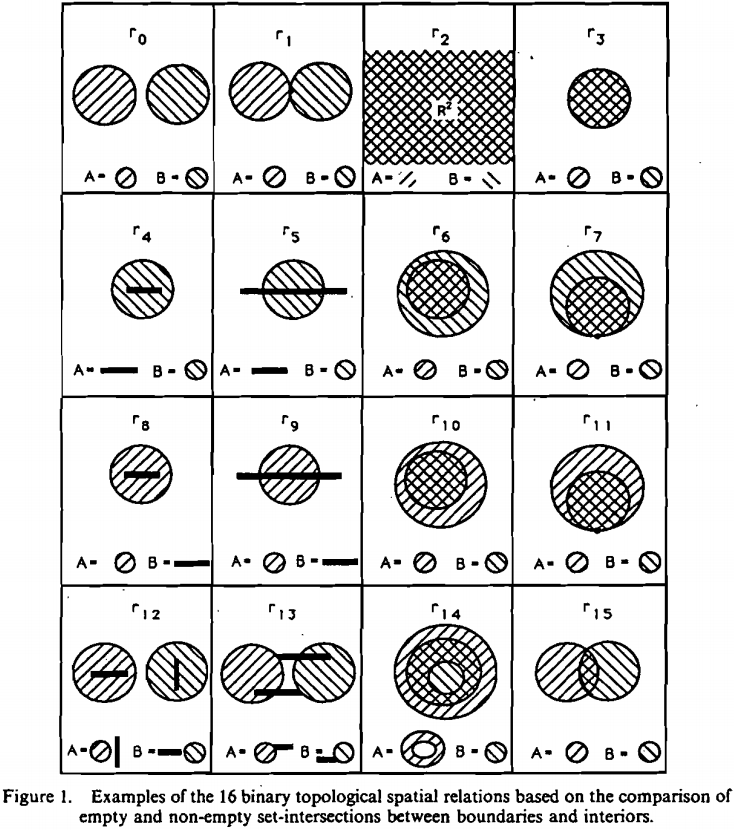
( . 0 r ' 0 ( 13，0 0 . 0，0

r，。0，0，0 ' 0

( "，0，0 . 0，0

168

埃肯霍夫和弗兰佐萨博士



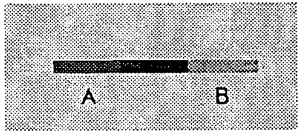


图2。两组A和B的配置相同，拓扑空间为(左侧面板)

关系式( 0 . 10 . 10 . 10 )，当嵌入一条线时，和(右面板) ( I0。0。0。0 )在一个

飞机。

拓扑关系

169

5 .空间区域之间的拓扑关系

本文的目的是对平面中多边形区域之间的拓扑空间关系进行建模；因此，拓扑空间X和X中考虑的集合受到限制。这些限制不太具体，关于拓扑空间X的唯一假设是它是连通的。这保证了每组兴趣的边界不是空的。

感兴趣的集合是空间区域，定义如下:

定义5.1。让X成为一个连通的拓扑空间。X中的空间区域是满足( 1 ) AD连接和( 2 ) A = A D的X的非空的适当子集A

根据定义，每个空间区域的内部是非空的。此外，空间区域被封闭和连接，因为它是连接集合的封闭。图3描绘了平面中的集合，由于未能满足定义5.1中的条件( 1 )或条件( 2 )，这些集合不是空间区域。A和B不是空间区域，因为AD和B D分别不相连。C和D不是空间区域，因为它们不能满足条件( 2 )，即需要后一组来实现平面中的拓扑空间关系R2’r5’RS - r9’r’2和r13。

以下命题暗示每个空间区域的边界是非空的。

提案5.2。如果A是X中的空间区域，那么OA 0。

证据:公元0年。A = - 4，因为A是封闭的，根据空间区域的定义，A是。

从命题3.4可以看出，AD和X - A形成了X - AA的分离。如果

aA = 0，则这两个集合形成X的分离，这是不可能的，因为X是

连接；因此，oA 0。0

5.1。区域关系的存在

点集之间空间关系的框架延续到空间区域，然而，任意点集之间的16种关系并不都存在于两个空间区域之间。从图1中的例子可以得出结论，至少关系式r0，r″R3，R6′r″r，o，rl1，r，..R’5存在于两个空间区域之间。以下命题表明，这九种拓扑空间关系是空间区域之间唯一可能出现的关系。

提案5.3。对于两个空间区域，空间关系R2’r..r5、s、r9’R12和r’3不能出现。

证明:这从证明如果边界-内部或内部-边界交叉点是非空的开始，那么相同两个区域之间的内部-内部交叉点也是非空的。这意味着六个拓扑空间关系r..r5、RS、r9’R12和rl3’都具有空的内部-内部和非空的边界-内部或内部-边界交叉点，不能出现。

(一)

(二)

(三)

( 0 )

图3。在平面中设置点空间区域。

170

埃肯霍夫和弗兰佐萨博士

让A和B成为空间区域，对于这些区域，可以为1 ' 0。显示了AONS“10”。

使用命题3.2，Aouija = A，Aouij ( AO ) = AO。A = A = AO，所以AOUIja = AOUIJ ( AO )。此外，通过命题3.1，AoIj { AO ) = 0，AoIja = 0。因此，Ij { AO ) = Ija。现在让Xeijans”打开，然后

包含x，由此得出aNbO 10。因此，如果边界-内部交点是

非空，则内部-内部交叉点也是非空的。同样，如果内部边界交点不是空的。那么内部-内部交叉点也是非空的。

接下来，证明了如果边界-边界交点是空的，并且内部-内部交点是非空的，那么边界-内部或内部-边界交点都是非空的。这意味着，具有非空的内部-内部交叉点以及边界-边界、边界-内部和内部-边界的空交叉点的空间关系“2”不会出现。这将完成命题的证明。

让A和B成为空间区域，使得iJanijb = 0和AONbol ' 0。它被展示了

如果IjanBo = 0，则AonIJB 1 ' 0。假设Ijanbo = 0。因为B = Bouijb。它

接下来Ijanb = 0，因此Bex - Ija。命题3.4暗示AO和

X - A形成了X - Ija的分离，由于B是相连的，命题3.3暗示了BeoO或Bex - A。由于假设AOnB 1 ' 0，因此

比厄，因此，我比厄。显然，IjBNAOL ' 0和结果如下。0

5.2。相关、相关的语义

在图1中，描述了空间区域之间拓扑空间关系“0 >‘1’‘3’‘6’‘0’‘11’’14和”的示例。这九种关系中的每一种都在下面的定义中被考虑，它们的语义使用与Egenhofer ( 1989 )和Egenhofer和Herring ( 1990 )中相同的符号进行研究。

定义5.4。表2给出了两个区域之间的九种拓扑空间关系的描述性术语。

如果A和B之间的拓扑空间关系是“0”，那么，在集合论中

意义上，A和B是不相交的，因此，拓扑空间关系不相交与集合论中的不相交概念一致。以下命题和推论证明了表2中定义的拓扑空间关系的其他描述性术语的合理性。

表2。坦尼诺学用于两个空间区域之间的九种关系。从洛杉矶到洛杉矶

0 ( 0 )。0。0。0 ) A和B不相交

r ( 10，0，0，0 ) A和B触摸

3 ( 10 )。10。0。0 ) A等于B

6 ( 0 )。10，' 0，0 ) A在B的内部，或者B包含A

r ( 10 )。0。10。0L A由B覆盖，或者B覆盖A

“0 ( 0，10。0，10 ) A包含B或者B在A的内部

”( 10，10。0。10 )甲盖乙或乙由甲盖

“4 ( 0，' 0，10 ) A和B与不相交的边界重叠”..( 10 )。10。0，- ' 0 ) A和B与相交边界重叠

拓扑关系

171

提案5.5。让A和B是X中的空间区域。如果AONB；LO0和AOnAb = 0，然后是AOnAb和ACB。

证明: AO已连接。命题3.4暗示B”和X - B形成a

由于AOAb = 0，因此命题3.1得出AO C B“u ( XB )”。命题3.3暗示AOCb”或AOC ( X - B )。但是AONB”；IO0；因此，

AOCBO。由于AOCb”，因此AOCb“根据定义5.1，意味着

ACR 0

从命题5.5可以看出，如果甲被乙覆盖，那么甲丙乙；因此，所覆盖的空间关系与集合论中的作为的子集的概念是一致的。

命题5.5的以下推论表明，空间关系相等对应于集合论中的相等概念。

推论5.6。让A和B成为空间区域。如果A和B之间的空间关系是rJ，那么A = B

证据:一个Nb；L0和AoAb = 0；因此，命题5.5暗示了应收帐款

此外，AANbO = 0。再次通过提案5.5，BCA。因此，A = B0

命题5.5的以下推论表明，如果A在B之内，那么A就在BO之内；因此，内部的空间关系与内部包含的拓扑概念相一致。相反，contains对应于内部的contains。

推论5.7。让A和B成为空间区域。如果A和B之间的空间关系是R6’，那么ACbO。

证据:命题5.5意味着AO \_ c \_ BO和A \_ C \_ R。通过命题3.2，A = AOUAA和B = BoaR \_ SO \_ AACr，因为AAaB = 0，所以AAcO。与AoCB一起”这意味着AcbO。0

6 .n维空间中的关系

自然会问“对拓扑空间X和X中考虑的集合的进一步限制会进一步减少可能发生的拓扑空间关系吗？”本节将通过考虑X是欧氏空间的情况来探讨这个问题。

R”表示具有通常欧几里德度量的n维欧几里德空间。如果集合中的点对之间的距离存在上限，则R”的子集是有界的；否则，据说它是无限的。

R”中的单位盘是R”中的一组点，其距原点的距离小于或等于1。R”中的单位球是R”中的一组点，其距原点的距离等于1。对于n；1 R”中的单元磁盘已连接。对于n；2 R”中的单位球是相连的。让X成为一个拓扑空间。X中的n -盘是与R”中的单位盘同胚的X的子空间。X中的n球是X的子空间，与R " + 1中的单位球同胚。R”中的n个盘是有界的，并且是空间区域；后者是Brouwer定理关于域不变性的相对直接的结果(西班牙人1966年)。由于R”中的n个磁盘是空间区域，命题5.3限制了它们之间可能出现的空间关系的数量。

172米埃肯霍夫和弗兰佐萨

在命题6.1中，证明了IfA和B是RNWith n中的n个盘；？\* 2，则“空间关系与不相交边界重叠的情况不会发生。这个命题的证明基于以下两个事实:

事实1。让A成为一个n盘，在R”中有n；？\* 2。那么OA是R”中的( n - I ) -球体，因此是连通的。

这个事实也是关于域不变性的Brouwer定理的结果(西班牙人1966年)。

事实2。让A成为一个n盘，在R”中有n；？\* 2。那么Rn - Ao是连通的和无界的。

第二个事实是与Jordan - Brouwer分离定理相关的(非)分离定理(西班牙人1966年)。

提案6.1。与不相交边界重叠的拓扑空间关系R14不会出现在R”中的n个盘与n之间；？\* 2。

证据:让A盘和B盘放在R”中，n；？\* 2.1t表示IFAF“LOB = 0，那么

A和B不重叠，因此，空间关系不会与不相交的边界重叠。

假设OAF“LOB = 0，A和B重叠。将会产生矛盾。乙是甲

空间区域；因此，命题3.4暗示B”和R”B形成R”- OB的分离。当OAF“LOB = 0”时，接下来是OACr”- OB。事实1表明，OA是相关的，因此，命题3.3意味着OA Cb”或OA c ( R ) - B。从甲和乙开始

重叠后，接下来是OAF“LbOi”0，因此是Oa C BO。

OAcO意味着OAf“l ( R ) - BO ) = 0。事实上，Rn \_ Bo是相连的。使用命题3.3和3.4，并如上所述，由此得出( R " - B " ) CaO或( Rn - B " ) c ( Rn - A )。第一种情况产生了矛盾，因为事实上，Rn \_ Bo是无界的，但是AO不是无界的。第二种情况暗示了一个碳化硼，因此，

F " LOB = 0，这与A和B重叠的假设相矛盾。因此，在

在任一情况下，都获得了矛盾，由此得出空间关系R14不能

发生在R”中的n个磁盘之间，n；？\* 2。0

“注意，对于n；？\* 2拓扑空间关系r15’与相交边界重叠，确实发生在两个n盘之间(图1 )。

相反的情况发生在RI中，其中R14可以发生在L盘之间，而R15与相交边界重叠，则不能。很明显，R14可能出现在R1中的两个I盘之间(图2 )。命题6.2表明Ri 5不能出现。它的证明需要一个很容易得到的事实，即RI中的一个空间区域对于某个A，Ber1来说是一个封闭区间[ a，b ]，或者对于某个Aer来说是一个封闭射线[ a，co )或者( - co，a )

提案6.2。R1中的空间区域之间不存在拓扑空间关系R15。“0

证明:假设A和B是R中的空间区域，假设A和Boverlap。是啊

显示OAF“LOB = 0”。A和B中的每一个都是封闭区间或封闭射线；因此，

有九种不同的情况需要检查。一个被选中；其他的可以被证明是“相应的”。

假设A = [ A，co )和B = ( co，B )。然后oA = { a }和oB = { b }。由于A和B重叠，因此A < B，这意味着oAf“loB = 0。0

拓扑关系

173

7。结论

已经提出了定义拓扑空间关系的框架..它基于纯粹的拓扑性质，因此与距离函数的存在无关。拓扑关系由两个点集的边界和内部的四个交点来描述。考虑到这些交叉点的二进制值为空和非空，已经确定了一组16个互斥的规范。如果对点集和拓扑空间作出特定的限制，关系就更少了。证明了与平面多边形区域同胚的点集之间只有九种拓扑空间关系。

尽管这项工作的性质相当理论化，但该框架对地理信息系统的设计和实施具有直接影响。以前，对于每个拓扑空间关系，都必须编程一个单独的过程，并且不存在确保完整性的机制。现在，拓扑空间关系可以从一个单一的、一致的模型中导出，不需要为单个关系编程。该框架的原型实现已经被设计和部分改进( Egenhofer 1989 )，并且对该框架的各种扩展进行了研究，以提供关于拓扑空间关系的更多细节，例如考虑交叉点的尺寸和交叉点上断开的子部分的数量( Egenhofer和Herring 1990 )。正在进行的研究集中在这个框架在拓扑空间关系组合的形式推理中的应用。

提出的框架被认为是一个开始，需要进一步的调查来验证其适用性。这里，只考虑了共维度为零的拓扑空间关系，即空间维度和嵌入空间对象维度之间的差异为零，例如在平面中的区域和一维线上的间隔之间，GIS应用感兴趣的还有共维度大于零的拓扑空间关系，例如在平面中的两条线之间( Herring 1991 )。同样，必须测试该框架对不同维度对象之间拓扑空间关系的适用性，例如区域和线。

感谢

这项工作的动机是布鲁斯·帕默提出的。在与约翰·赫林的多次讨论中，这些概念都得到了澄清。安德鲁·弗兰克和雷纳托·巴雷拉对这篇论文的早期版本发表了宝贵的评论。这项工作部分由国家科学基金第186 - 09123号资助，数字设备公司根据第414号赞助研究协议资助，TP - 765536号赞助研究协议资助，人口普查局根据联合统计协议资助。感谢国家科学基金根据SES 88 - 10917号资助额外资助NCGIA。

参考

美国国家科学基金会国家图像信息和分析中心，1987年。国际地理信息系统杂志，I，303 - 326。艾伦，J . F . 1983，保持关于时间间隔的知识。ACM的来文，26，832 - 843。

张士凯，荣格特，李，Y，1989，基于

符号投影理论。In :在加利福尼亚州圣巴巴拉举行的大型空间数据库设计和实施研讨会记录，由史密斯·T·史密斯·O·Giintet和王y编辑(纽约: Springer - Verlag )，《计算机科学讲义》，第409卷，第303 - 323页。

CLAIRE和GUPTILL，1982，选择数据结构的空间操作符。In :在弗吉尼亚州水晶城举行的反对派- Carto诉诉讼，第189 - 200页。

174

拓扑关系

《二元拓扑关系的正式定义》，M . EGENHOfer，1989。在:第三

在法国巴黎举行的关于数据组织和算法的四次会议；由李温和谢克编辑(纽约:斯普林格-弗拉格)，

《计算机科学讲义》，第367卷，第451 - 472页。

Egenhofer和HERING，J，1990，定义的数学框架

拓扑关系。In :在瑞士苏黎世举行的第四届国际现场数据处理研讨会记录，由K . Brassel和Kishimoto编辑，第803 - 813页。

FRANK，1982，地图查询-电子数据库查询语言。用于检索几何数据及其图形表示。ACM计算机图形学，16，199 - 201。

弗里曼，J，1915，《空间关系的建模》。计算机图形和图像处理，4，156 - 111。

获得。R，1988，Gee -关系代数:几何数据库的模型和查询语言

系统。In :在意大利威尼斯举行的扩展数据库技术国际会议，由J . Schmidt、S . Ceri和M . Missikolf编辑(纽约: Springer - Verlag )，《计算机科学讲义》，第303卷，第506 - 521页。

Hernandez，D，1991，空间知识的相对表示:二维案例。在:认知

《地理空间的语言方面》，由马克和弗兰克编辑(多德雷赫特: Kluwer学术出版社)，

《空间和非空间信息的数学建模》，1991年

地理信息系统。《地理空间的认知和语言方面》，由马克和弗兰克编辑(多德雷赫特: Kluwer学术出版社)。J .海岭，拉森和Shivakumar，1988，支持SQL语言的扩展

拓扑数据库中的空间分析。In : GIS / LIS’SS会议记录，在德克萨斯州圣安东尼奥举行，第741 - 15O页。

Herskowlts，A，1986，语言和空间认知——英语介词的跨学科研究(剑桥:剑桥大学出版社)。INGRAM和PHILUI，W，1981，“使用基于SQL的地理信息处理”

查询语言。In :《自动制图协会会议录》，第八届国际计算机辅助制图会议，马里兰州巴尔的摩，由克雷斯曼编辑，第326 - 335页。

Kanz，W，1990，空间关系-拓扑与顺序。在:第四次会议记录

空间数据处理国际研讨会在瑞士苏黎世举行，由K . Brassel和Kishimoto编辑，第814 - 819页。

MoleNaar，M，1989，单值矢量地图——地理信息系统中的一个概念。地球观测系统。L；18 - 26。

《电子微分拓扑》(新泽西州普林斯顿:普林斯顿大学出版社)，1966年。

国家地理信息和分析中心，1989年，该研究

国家地理信息和分析中心的计划。国际地理信息系统杂志，3，117 - 136。

PEQUOT，D，1986，《空间的使用》。帮助空间数据库检索的关系。在:

在华盛顿州西雅图举行的第二届空间数据处理国际研讨会记录，D . Marble编辑，第459 - 411页。

PEQUOT，D和CI -翔，Z，1981，一种确定平面中任意形状多边形之间方向关系的算法。鲍恩认可，20，65 - 14。Puller，D，1988，空间数据模型上的数据定义和运算符。年:在密苏里州圣路易斯举行的ACSM - ASPS年度会议记录，第191 - 202页。《拓扑关系的形式化定义》，北京大学出版社，1988年

空间物体之间。In :在澳大利亚悉尼举行的第三届空间数据处理国际研讨会记录，由D . Marble编辑，第225 - 242页。1988年，一个有效的PSQL图形数据库系统。IEEE软件工程交易，14，63 ( ) - { ) 38。

史密斯，T，PEQUOT，MENON，S，和AGGRWAL，P，1981，KBGIS - II :基于知识的

地理信息系统。国际地理信息系统杂志，1，149 - 112。

西班牙人，E，1966，代数拓扑(纽约: McGraw - Hili )。TALMI，L，1983，语言如何构造空间。在:空间定位:理论、研究和

应用，由H . Pick和L . Acrydolo编辑(纽约:压力通风出版社)，第225 - 282页。WANGER，1988，一种评估多边形覆盖算法的方法。年:在密苏里州圣路易斯举行的ACSM - ASPS年度会议记录。第113 - 183页。